

# QUELQUES RÉFLEXIONS INÉVITABLES

FRANK WAGNER

RÉSUMÉ. Nous généralisons la construction de Frécon du *radical inévitable* aux groupes dans les théories stables et même simples.

ABSTRACT. We generalize Frécon's construction of the *inevitable radical* to groups in stable and even simple theories.

## 1. INTRODUCTION

Dans [1] Olivier Frécon a défini un sous-groupe définissablement caractéristique d'un groupe de rang de Morley fini, le sous-groupe  $\text{In}(G)$  des éléments *inévitables*, sous-groupe minimal tel qu'on puisse espérer construire une géométrie sur  $G/\text{In}(G)$ . Nous allons généraliser ses définitions au cas d'un groupe stable, ou encore hyperdéfinissable dans une théorie simple, et étudier les propriétés des sous-groupes obtenus.

## 2. LES DÉFINITIONS INÉVITABLES

Rappelons d'abord les définitions (ou plutôt les caractérisations équivalentes) de [1] :

**Définition 2.1.** Soit  $G$  un groupe de rang de Morley fini. Une famille définissable  $\mathcal{F}$  de sous-groupes connexes de  $G$  est *géométrique* si l'ensemble  $\{g \in G : \exists! F \in \mathcal{F} \ g \in F\}$  est générique dans  $G$ .

Un élément  $g \in G$  est *géométrique* s'il y a une famille géométrique  $\mathcal{F}$  avec  $g \notin \bigcup \mathcal{F}$ .

$G$  est *géométrique* si tout élément non-trivial de  $G$  est géométrique.

Un élément non-géométrique est *inévitable*. L'ensemble des éléments inévitables est noté  $\text{In}(G)$ .

Frécon montre que  $\text{In}(G)$  est un sous-groupe définissable et définissablement caractéristique de  $G$ . En plus, si  $\mathcal{F}$  est géométrique pour  $G$ ,

---

*Date:* 19 janvier 2011.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 03C45; 20E34.

*Key words and phrases.* simple theory; stable group; geometric family of subgroups; inevitable radical.

Recherche partiellement soutenu par le projet ANR-09-BLAN-0047 Modig.

alors  $\{F \in \mathcal{F} : \text{In}(G) \leq F\}$  est géométrique, et donc  $G/\text{In}(G)$  est un groupe géométrique.

**Remarque 2.2.** Puisque la famille  $\mathcal{F}$  est définissable, les sous-groupes dans  $\mathcal{F}$  sont uniformément définissables. Par contre, comme on ne sait pas si la connexité est une propriété définissable, on ne sait pas non plus si toute famille de sous-groupes connexes uniformément définissables est contenue dans une famille définissable de sous-groupes connexes. Plus généralement on ne sait pas si la famille des composantes connexes d'une famille de sous-groupes uniformément définissables est encore uniformément définissable. Il n'est donc pas clair si  $\text{In}(G)$  est le plus petit sous-groupe normal de  $G$  tel que le quotient soit géométrique.

Si  $\mathcal{F}$  est une famille géométrique d'un groupe de rang de Morley  $G$ , alors on peut définir une géométrie naturelle dont les points sont les éléments de  $G$ , et les droites les translates (à gauche) des sous-groupes dans  $\mathcal{F}$ . Alors génériquement deux points de  $G$  sont sur une droite commune unique.

Frécon note qu'on doit aussi considérer les familles géométriques des puissances cartésiennes de  $G$  : Pour le groupe additif d'un pur corps  $K$  algébriquement clos,  $\text{In}(K) = K$  comme pour tout groupe minimal, mais  $\text{In}(K \times K)$  est trivial.

**Définition 2.3.** Soit  $G$  un groupe de rang de Morley fini et  $\rho_n : G \rightarrow \prod_{i < n} G$  le plongement  $g \mapsto (g, 1, \dots, 1)$ . On pose

$$\text{In}_P(G) = \bigcap_{n > 0} \rho_n^{-1}(\text{In}(\prod_{i < n} G)).$$

Alors  $\text{In}_P(G)$  est définissable, définissablement caractéristique, contenu dans  $\text{In}(G)$ , et vérifie  $\text{In}_P(G/\text{In}_P(G)) = 1$ . De plus,

$$\text{In}_P(\prod_{i < n} G) = \prod_{i < n} \text{In}_P(G).$$

**Exemple 2.4.** [2] Soit  $G$  un groupe de rang de Morley fini et  $C$  un sous-groupe de *Carter* (sous-groupe définissable connexe nilpotent presque auto-normalisant) *généreux* (dont la réunion des conjugués recouvre  $G$  génériquement). Alors la famille des conjugués de  $C$  est géométrique.

**Exemple 2.5.** [1] Soit  $G$  un groupe de rang de Morley fini et  $H$  un sous-groupe définissable sans torsion, d'indice fini dans son normalisateur. Alors soit  $H$  admet une famille géométrique de sous-groupes propres, soit la famille de conjugués de  $H$  est géométrique dans  $G$ .

En particulier, si  $H = C$  est un sous-groupe de Carter et  $G$  est un groupe simple connexe minimal, alors soit la famille de conjugués de

$C$  est géométrique, soit  $C$  a une famille géométrique de sous-groupes propres et interprète un corps algébriquement clos.

Nous conseillons l'article de Frécon [1] pour une analyse des groupes géométriques algébriques et une discussion des groupes géométriques de rang de Morley fini. Pour plus de renseignements sur les groupes stables, auxquels nous cherchons à généraliser les résultats de Frécon, le lecteur pourra consulter [3], [4] ou [6]; quant aux théories simples et leurs groupes hyperdéfinissables il y a [5], [7] et [8].

### 3. RAJOUTONS UN PEU DE SIMPLICITE !

Les définitions ci-dessus restent raisonnables dans le contexte plus général des groupes  $\omega$ -stables, où les composantes connexes existent et sont définissables. Dans un groupe stable, les composantes connexes ne sont a priori que type-définissables, données par une intersection infinie de sous-groupes définissables d'indices finis; de plus, le contexte naturel dans une théorie stable sont les groupes type-définissables. Pire encore, pour un groupe hyperdéfinissable dans une théorie simple, les composantes connexes dépendent des paramètres, et même dans le cas type-définissable la question si un tel groupe est intersection de groupes définissables reste ouverte.

**Définition 3.1.** Soit  $G$  un groupe hyperdéfinissable sur  $A$ , et  $H$  un sous-groupe de  $G$  hyperdéfinissable sur  $B$ .

- Un sous-groupe hyperdéfinissable  $K$  de  $G$  est *commensurable* avec  $H$  si  $H \cap K$  est d'indice borné dans  $H$  et dans  $K$ .
- $H$  est *localement connexe* si  $H$  est égal à tout  $H^\gamma$ , conjugué de  $H$  par un élément de  $G$  ou par un automorphisme modèle-théorique fixant  $A$ , dès que  $H$  et  $H^\gamma$  sont commensurables.
- $B$  est le *paramètre canonique* de  $H$  (sur  $A$ ) si tout automorphisme fixant  $A$  stabilise  $H$  si et seulement s'il fixe  $B$ .

La notion de connexité locale dépend du groupe ambiant  $G$  et de ses paramètres  $A$ .

**Fait 3.2.** – Soit  $G$  un groupe type-définissable sur  $A$  dans une théorie stable, et  $H \leq G$  un sous-groupe type-définissable. Alors  $H$  possède un paramètre canonique, et sa composante connexe  $H^0$  est localement connexe. Si  $H$  est relativement définissable, alors  $H$  possède un paramètre canonique imaginaire fini, et l'intersection de tous les  $A$ -conjugués et de tous les  $G$ -conjugués de  $H$  commensurables avec  $H$  est un sous-groupe  $H^{lc}$  relativement définissable localement connexe d'indice fini dans  $H$ .

- [5, Corollary 4.2.10, Corollary 4.5.16 et Lemma 4.5.19] *Soit  $G$  un groupe hyperdéfinissable sur  $A$  dans une théorie simple, et  $H \leq G$  un sous-groupe hyperdéfinissable. Alors il existe un sous-groupe  $H^{lc}$  hyperdéfinissable localement connexe commensurable avec  $H$  ; si  $G$  est type-définissable et  $H$  relativement définissable, alors  $H^{lc}$  est relativement définissable. Tout groupe localement connexe à un paramètre canonique.*

**Remarque 3.3.** Soit  $F = \{G \cap F_c : c \models p\}$  une famille de sous-groupes relativement définissables localement connexes dans une théorie simple telle que  $F_c$  définisse un groupe pour tout  $c$  (par exemple si le groupe ambiant  $G$  est définissable). Pour  $c \models p$  soit  $n(\varphi, k) = D^*(G \cap F_c, \varphi, k)$  le  $(\varphi, k)$ -rang local de  $G \cap F_c$ . Alors si  $c', c'' \models p$  et

$$D^*(G \cap F_{c'} \cap F_{c''), \varphi, k) \geq n(\varphi, k)$$

pour tout  $(\varphi, k)$ , alors  $G \cap F_{c'}$  et  $G \cap F_{c''}$  sont commensurables, et donc  $c' = c''$ . Par compacité il y a un ensemble fini  $\{(\varphi_i, k_i) : i < n\}$ , une formule  $\psi_0 \in p$  et un ensemble définissable  $X \supseteq G$  tels que

$$\psi_0(c') \wedge \psi_0(c'') \wedge \bigwedge_{i < n} D^*(X \cap F_{c'} \cap F_{c''}, \varphi_i, k_i) \geq n(\varphi_i, k_i)$$

implique  $c' = c''$ . Soit  $\psi(x)$  la formule

$$\psi_0(x) \wedge \bigwedge_{i < n} D^*(X \cap F_x, \varphi_i, k_i) \geq n(\varphi_i, k_i).$$

Alors la famille  $\bar{\mathcal{F}} = \{G \cap F_c : c \models \psi\}$  est une famille définissable de sous-groupes localement connexes de  $G$ .

A partir de maintenant soit  $G$  un groupe hyperdéfinissable sur  $\emptyset$  dans une théorie simple. Comme nos familles de sous-groupes ne consistent plus de groupes connexes, mais localement connexes, il convient de relâcher un peu la condition d'unicité dans la définition d'une famille géométrique.

**Définition 3.4.** Soit  $A$  un ensemble de paramètres. La famille  $\mathcal{F}$  des  $A$ -conjugués d'un sous-groupe localement connexe hyperdéfinissable de  $G$  est *(pseudo-)géométrique* si  $\bigcup \mathcal{F}$  est générique, et si pour tout  $g \in G$  générique l'ensemble  $\{F \in \mathcal{F} : g \in F\}$  est de cardinal au plus 1 (resp. de cardinal borné).

Un élément  $g \in G$  est *(pseudo-)géométrique* s'il y a une famille (pseudo-)géométrique  $\mathcal{F}_g$  avec  $g \notin \bigcup \mathcal{F}_g$ . Le groupe  $G$  est *(pseudo-)géométrique* si tout élément non-trivial de  $G$  est (pseudo-)géométrique.

Un élément non-(pseudo-)géométrique est *(pseudo-)inévitabile*.

L'ensemble des éléments inévitables est noté  $\text{In}(G)$ , l'ensemble des éléments pseudo-inévitables  $\Psi(G)$ .

Si  $\mathcal{F}$  est une famille (pseudo-)géométrique, puisque tous ses éléments sont conjugués, la connexité locale implique que  $F_1$  et  $F_2$  dans  $\mathcal{F}$  sont égaux dès qu'ils sont commensurables. On notera aussi que tout membre de  $\mathcal{F}$  contient un élément générique de  $G$  (qui algébraise son paramètre canonique, bien sur), comme tous les groupes dans  $\mathcal{F}$  sont conjugués par  $A$ -automorphisme.

**Remarque 3.5.** Soit  $\mathcal{F}$  une famille hyperdéfinissable sur  $A$  avec  $\bigcup \mathcal{F}$  générique et  $\{F \in \mathcal{F} : g \in F\}$  de cardinal au plus un (resp. borné) pour tout  $g \in G$  générique sur  $A$ . Soit  $F_0 \in \mathcal{F}$  et  $g \in F_0$  générique de  $G$  sur  $A$ . Soit  $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$  la sous-famille des  $A$ -conjugués de  $F_0$ . Alors  $\mathcal{F}_0$  est une famille (pseudo-)géométrique pour  $G$ . La condition que les éléments de  $\mathcal{F}$  soient conjugués sur  $A$  n'est donc pas une vraie restriction.

**Remarque 3.6.** Soit  $\mathcal{F} = \{G \cap F_c : c \models p\}$  une famille géométrique de sous-groupes relativement définissables dans une théorie simple telle que  $F_c$  définisse un groupe pour tout  $c$ . Alors par compacité il existe un ensemble générique  $X$  de  $G$  et une formule  $\varphi \in p$  tel que pour tout  $c' \models \varphi$  l'ensemble  $G \cap F_{c'}$  est un sous-groupe localement connexe de  $G$ , et pour tout  $g \in X$  il existe un unique  $c_g \models \varphi$  avec  $g \in G \cap F_{c_g}$ . Si donc  $G$  est définissable, alors  $\{G \cap F_{c'} : c' \models \varphi\}$  est une famille géométrique au sens de Frécon (sauf qu'on a remplacé la connexité par la connexité locale, faute de pouvoir obtenir cette première définissabilité). Réciproquement, si  $\mathcal{F}$  est une famille géométrique sur  $A$  au sens de Frécon,  $g \in G$  est générique sur  $A$  et  $F_c \in \mathcal{F}$  contient  $g$ , alors la famille des  $A$ -conjugués de  $F_c$  est une famille géométrique au sens de la définition 3.4.

**Remarque 3.7.** Si  $\mathcal{F}$  consiste de sous-groupes connexes, alors l'élément  $g \in G$  générique qui est contenu dans un membre de  $\mathcal{F}$  est forcément dans la composante connexe de  $G$ ; si la théorie est stable, il n'y a qu'un seul type possible, et on peut supposer dès le départ que  $G$  soit connexe. En particulier notre définition 3.4 généralise bien celle de Frécon.

Par contre, même dans le cas stable, si  $\mathcal{F}$  ne consiste pas de sous-groupes connexes, il n'y a pas raison que  $g$  soit générique principal, ni même qu'un générique principal soit contenu dans un membre de  $\mathcal{F}$  : Soit  $G$  le produit semidirect de  $\mathbb{Q}$  avec une involution  $i$  qui agit par inversion, et  $\mathcal{F}$  la famille de conjugués de  $\langle i \rangle$ . Alors  $G$  est  $\omega$ -stable de rang 1 et degré 2; un générique non-principal est dans un seul membre de  $\mathcal{F}$ , et  $\bigcup \mathcal{F} \cap G^0 = \{0\}$ .

**Remarque 3.8.** Afin d'éviter des cas dégénérés on peut demander dans la définition d'une famille géométrique  $\mathcal{F}$  que les groupes  $F \in \mathcal{F}$  soient infinis, ou qu'un générique de  $G$  ne soit pas étranger à  $F$ , ou encore que  $G$  soit  $F$ -analysable (conditions de plus en plus restrictives). Inversement, nos preuves ne se servent de la connexité locale que pour s'assurer qu'un paramètre canonique existe ; en utilisant des paramètres de définition quelconques raisonnablement indépendants on peut se passer de cette hypothèse.

**Remarque 3.9.** Si  $\mathcal{F}$  est une famille géométrique pour  $G$ , alors la famille des translatés à gauche des sous-groupes dans  $\mathcal{F}$  nous donne une géométrie sur  $G$  tel que génériquement deux points sont sur au plus une droite commune. Si  $\mathcal{F}$  n'est que pseudo-géométrique, cela nous donne une pseudo-géométrie : Génériquement deux points ne sont que sur un nombre borné de droites communes. Par compacité, si le paramètre canonique d'un groupe dans  $\mathcal{F}$  est un élément imaginaire (par exemple si les groupes sont relativement définissables), ce nombre borné est fini.

**Remarque 3.10.** Si  $\mathcal{F}_i$  est une famille (pseudo-)géométrique de  $G_i$  pour  $i = 1, 2$  et  $F_1 \in \mathcal{F}_1$  et  $F_2 \in \mathcal{F}_2$  ont des paramètres indépendants, alors la famille des conjugués de  $F_1 \times F_2$  est (pseudo-)géométrique dans  $G_1 \times G_2$ .

**Proposition 3.11.** *Soit  $A \subseteq B$ , et  $F \leq G$  un sous-groupe localement connexe hyperdéfinissable de paramètre canonique  $c$  avec  $c \downarrow_A B$ . Si la famille  $\mathcal{F}_A$  des  $A$ -conjugués de  $F$  est (pseudo-)géométrique, alors la famille  $\mathcal{F}_B$  des  $B$ -conjugués l'est. La réciproque est vraie pour les familles pseudo-géométriques ; dans le cas d'une famille géométrique il faut supposer en plus que  $\text{tp}(c/A)$  soit stationnaire (par exemple si  $A = \text{acl}^{eq}(A)$  dans une théorie stable).*

*Démonstration :* Soit  $\mathcal{F}_A$  (pseudo-)géométrique, et  $g \in F$  générique de  $G$  sur  $A$ . On peut supposer  $g \downarrow_{Ac} B$ . Par transitivité  $B \downarrow_A gc$ , et  $g$  est générique sur  $B$ . Donc  $\bigcup \mathcal{F}_B$  est générique. Mais tout générique de  $G$  sur  $B$  est générique sur  $A$ , et  $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{F}_A$ . Donc  $\mathcal{F}_B$  est (pseudo-)géométrique.

Pour la réciproque, supposons  $\mathcal{F}_B$  pseudo-géométrique. Evidemment  $\bigcup \mathcal{F}_A \supseteq \bigcup \mathcal{F}_B$  est générique dans  $G$ . Soit  $g \in F$  générique de  $G$  sur  $A$  ; on peut supposer  $g \downarrow_A B$ . Soient  $c_i \equiv_A c$  les paramètres canoniques des  $F_i \in \mathcal{F}_A$  avec  $g \in F_i$  pour  $i \in I$ . Si  $I$  n'est pas borné, on peut supposer  $(c_i : i \in I)$  indiscernable sur  $A$  et  $(c_i : i \in I) \downarrow_{Ag} B$ , d'où  $B \downarrow_A (c_i : i \in I)$ . Comme  $p(X, c) = \text{tp}(B/Ac)$  ne devie pas sur  $A$ , on

trouve une réalisation

$$B' \models \bigcup_{i \in I} p(X, c_i) \quad \text{avec} \quad B' \downarrow_A (c_i : i \in I) ;$$

on peut supposer en plus que

$$B' \downarrow_{(A, c_i : i \in I)} g,$$

d'où  $B' \downarrow_A g$ . Donc  $g$  est générique sur  $B'$  et  $F_i \in \mathcal{F}_{B'}$ , l'image de  $\mathcal{F}_B$  sous un  $A$ -automorphisme envoyant  $B$  sur  $B'$ . Comme  $\mathcal{F}_B$  est pseudo-géométrique,  $\mathcal{F}_{B'}$  l'est aussi, est  $I$  doit être bornée après tout.

Soit enfin  $\mathcal{F}_B$  géométrique et  $\text{tp}(c/A)$  stationnaire. Alors  $\bigcup \mathcal{F}_A$  est générique ; soient donc  $g \in F$  et  $(F_i, c_i : i \in I)$  comme dans le paragraphe précédent. On suppose encore

$$g \downarrow_A B \quad \text{et} \quad (c_i : i \in I) \downarrow_{Ag} B.$$

Donc  $c_i \downarrow_A B$  pour tout  $i \in I$  ; par stationarité  $c_i \equiv_B c$  et  $F_i \in \mathcal{F}_B$ . Puisque  $g$  est générique sur  $B$  et  $\mathcal{F}_B$  est géométrique,  $|I| = 1$ . Donc  $\mathcal{F}_A$  est géométrique.  $\square$

**Remarque 3.12.** En particulier, dans une théorie simple  $\text{In}(G)$  et  $\Psi(G)$  sont invariants sous l'adjonction de paramètres.

**Corollaire 3.13.** *Soit  $\mathcal{F}$  une famille (pseudo-)géométrique pour  $G$ . Si  $g \in G$  est (pseudo-)inévitale, alors  $g \in F$  pour tout  $F \in \mathcal{F}$  dont le paramètre canonique  $c$  est indépendant de  $g$  sur  $A$ .*

*Démonstration :* La famille  $\mathcal{F}_g$  des  $Ag$ -conjugés de  $F$  est toujours (pseudo-)géométrique, donc  $g \in \bigcup \mathcal{F}_g$ . Mais alors  $g \in F$ .  $\square$

**Corollaire 3.14.**  *$\text{In}(G)$  et  $\Psi(G)$  sont des sous-groupes de  $G$  définissablement et modèle-théoriquement caractéristiques (c'est-à-dire invariant par automorphisme définissable ou modèle-théorique).*

*Démonstration :* Si  $\mathcal{F}$  est une famille géométrique pour  $G$  et  $g, g' \in \text{In}(G)$ , alors pour  $F \in \mathcal{F}$  de paramètre canonique indépendant de  $g, g'$  on a  $g, g' \in F$ , et donc  $g'g^{-1} \in F$ , d'où  $g'g^{-1} \in \text{In}(G)$  : Il s'agit bien d'un sous-groupe. Puisque  $\text{In}(G)$  est invariant sous l'adjonction de paramètres nécessaires pour définir un automorphisme  $\sigma$ , et comme  $\mathcal{F}$  est géométrique si et seulement si  $\sigma(\mathcal{F})$  est géométrique pour tout automorphisme définissable ou modèle-théorique,  $\text{In}(G)$  est définissablement et modèle-théoriquement caractéristique.

La preuve dans le cas pseudo-géométrique est analogue.  $\square$

**Corollaire 3.15.** *S'il y a une famille géométrique non-triviale,  $\text{In}(G)$  ne contient aucun élément générique. S'il y a une famille pseudo-géométrique non-bornée,  $\Psi(G)$  ne contient aucun élément générique.*

*Démonstration :* Supposons que  $g \in \text{In}(G)$  soit générique pour  $G$ , et soit  $\mathcal{F}$  une famille géométrique sur  $A$ . On peut supposer que  $A \downarrow g$ . Soient  $F, F' \in \mathcal{F}$  de paramètres canoniques  $c, c'$ . On peut les choisir tels que  $c, c' \downarrow_A g$ . Alors  $g \in F$  et  $g \in F'$  par le corollaire 3.13, d'où  $F = F'$  et  $\mathcal{F}$  est triviale.

Si  $g \in \Psi(G)$  est générique et  $\mathcal{F}$  est une famille pseudo-géométrique sur  $A$ , avec  $A \downarrow g$ , on considère des groupes distincts  $F_i \in \mathcal{F}$  de paramètres canoniques  $c_i$ , pour  $i \in I$ . On peut supposer  $(c_i)_{i \in I} \downarrow_A g$ . Alors  $g \in F_i$  pour tout  $i \in I$  par le corollaire 3.13. Ainsi  $I$  et donc  $\mathcal{F}$  sont bornés.  $\square$

**Théorème 3.16.** *Si  $T$  est stable,  $\text{In}(G)$  et  $\Psi(G)$  sont hyperdéfinissables sur  $\emptyset$ .*

*Démonstration :* Soit  $\mathcal{F}$  une famille géométrique, disons la famille des  $A$ -conjugués d'un groupe  $F_c$  localement connexe de paramètre canonique  $c$ . On considère l'ensemble hyperdéfinissable

$$G_{\mathcal{F}} = \{g \in G : \exists y \models \text{stp}(c/A) [y \downarrow_A g \wedge g \in F_y]\}.$$

Alors  $G_{\mathcal{F}}$  est un sous-groupe hyperdéfinissable de  $G$  contenu dans  $\bigcup \mathcal{F}$ . Si  $g \in G$  est inévitable, alors pour  $c' \models \text{stp}(c/A)$  avec  $c' \downarrow_A g$  le corollaire 3.13 montre que  $g \in F_{c'}$ , d'où  $g \in G_{\mathcal{F}}$  et  $\text{In}(G) \subseteq G_{\mathcal{F}}$ . Si  $g \in G$  est géométrique, il existe une famille géométrique avec  $g \notin \bigcup \mathcal{F}$ , d'où  $g \notin G_{\mathcal{F}}$ . Ainsi  $\text{In}(G) = \bigcap_{\mathcal{F}} G_{\mathcal{F}}$ , ce qui est hyperdéfinissable par la condition de chaîne dans les théories stables. Comme  $\text{In}(G)$  est  $\emptyset$ -invariant, il est hyperdéfinissable sur  $\emptyset$ .

La preuve pour  $\Psi(G)$  est analogue.  $\square$

**Corollaire 3.17.** *Soit  $T$  stable. Si  $\mathcal{F}$  est une famille géométrique, alors  $\text{In}(G) \leq \bigcap \mathcal{F}$ ; si  $\mathcal{F}$  est pseudo-géométrique, alors  $\Psi(G) \leq \bigcap \mathcal{F}$ .*

*Démonstration :* Si  $\mathcal{F}$  est  $B$ -invariant,  $F \in \mathcal{F}$  avec paramètre canonique  $c$ , et  $g \in \text{In}(G)$  est générique sur  $Bc$ , alors  $g \downarrow_B c$ , d'où  $g \in F$ . Donc  $\text{In}(G) \leq F$ , et  $\text{In}(G) \leq \bigcap \mathcal{F}$ .

La preuve dans le cas pseudo-géométrique est analogue.  $\square$

**Corollaire 3.18.** *Soit  $T$  stable.*

- $\text{In}(G) = \bigcap \{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ géométrique}\}.$
- $\Psi(G) = \bigcap \{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ pseudo-géométrique}\}.$   $\square$



**Corollaire 3.19.** *In et  $\Psi$  sont des radicaux, c'est-à-dire  $\text{In}(G/\text{In}(G))$  et  $\Psi(G/\Psi(G))$  sont triviaux.*

*Démonstration :* Soit  $\mathcal{F}$  géométrique pour  $G$ . Comme  $\text{In}(G) \leq F$  pour tout  $F \in \mathcal{F}$ , l'image  $\bar{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$  dans  $G/\text{In}(G)$  est géométrique. Comme  $\bigcap_{\mathcal{F}} \bigcap \mathcal{F} = \text{In}(G)$ , on a

$$\text{In}(G/\text{In}(G)) \leq \bigcap_{\mathcal{F}} \bigcap \bar{\mathcal{F}} = (\bigcap_{\mathcal{F}} \bigcap \mathcal{F})/\text{In}(G) = \text{In}(G)/\text{In}(G) = \bar{1}.$$

La preuve pour  $\Psi$  est analogue.  $\square$

**Remarque 3.20.** On peut alors définir  $\text{In}_P$  et  $\Psi_P$  de la même manière que Frécon (définition 2.3) et obtenir que  $\text{In}_P(G)$  et  $\Psi_P(G)$  sont des radicaux hyperdéfinissables, définissablement et modèle-théoriquement caractéristiques, et contenu dans  $\text{In}(G)$  et  $\Psi(G)$ , respectivement. De plus,

$$\text{In}_P\left(\prod_{i < n} G\right) = \prod_{i < n} \text{In}_P(G) \quad \text{et} \quad \Psi_P\left(\prod_{i < n} G\right) = \prod_{i < n} \Psi_P(G).$$

#### 4. DANS LE CAS SIMPLE, LES CHOSES SE COMPLIQUENT...

Si  $G$  est un groupe dans une théorie simple où on n'a la condition de chaîne qu'à indice borné près, il convient de remplacer les groupes  $\text{In}(G)$  et  $\Psi(G)$  par des approximations  $\tilde{\text{In}}(G)$  et  $\tilde{\Psi}(G)$ , comme c'est déjà le cas pour le centralisateur, le normalisateur ou le centre approximatif [5, Définition 4.4.9].

**Théorème 4.1.** *Il existe un sous-groupe normal  $\tilde{\text{In}}(G)$  hyperdéfinissable sur  $\emptyset$  tel que  $\text{In}(G) \leq \tilde{\text{In}}(G)$ , et si  $\mathcal{F}$  est une famille géométrique, alors  $F$  intersecte  $\tilde{\text{In}}(G)$  dans un sous-groupe d'indice borné pour tout  $F \in \mathcal{F}$ . De même, il existe un sous-groupe normal  $\tilde{\Psi}(G)$  hyperdéfinissable sur  $\emptyset$  tel que  $\Psi(G) \leq \tilde{\Psi}(G)$ , et si  $\mathcal{F}$  est une famille pseudo-géométrique, alors  $F$  intersecte  $\tilde{\Psi}(G)$  dans un sous-groupe d'indice borné pour tout  $F \in \mathcal{F}$ . Les groupes  $\tilde{\text{In}}(G)$  et  $\tilde{\Psi}(G)$  sont invariants sous automorphisme  $\emptyset$ -définissable, et commensurables à leurs conjugués par un automorphisme définissable.*

*Démonstration :* Soit  $F = F_c$  un groupe dans une famille géométrique, et  $p_F$  le type Lascar-fort de son paramètre canonique  $c$  sur  $\emptyset$ . On considère l'ensemble hyperdéfinissable

$$X_F = \{g \in G : \exists y \models p_F [y \perp g \wedge g \in F_y]\}.$$

Soit  $X = \bigcap_F X_F$ . Puisque l'intersection porte sur les différentes possibilités pour  $p_F \in S(\text{bdd}(\emptyset))$ , l'intersection est bornée et  $X$  est hyperdéfinissable.

Si  $g', g'' \in X$  sont indépendants, alors pour tout  $p_F$  il y a  $c', c'' \models p_F$  avec  $c' \perp g'$  et  $g' \in F_{c'}$ , ainsi que  $c'' \perp g''$  et  $g'' \in F_{c''}$ . Grâce au théorème d'indépendance on peut supposer  $c' = c''$  et  $c' \perp g, g'$ . Alors  $g, g' \in F_{c'}$  et  $g'g^{-1} \in F_{c'}$ ; comme  $g'g^{-1} \perp c'$  on a  $g'g^{-1} \in X_F$ , d'où  $g'g^{-1} \in X$ . On pose  $H = X^2$ . Alors  $H$  est un sous-groupe de  $G$  hyperdéfinissable sur  $\text{bdd}(\emptyset)$  par [5, Lemma 4.4.8], et  $X$  contient tous les types génériques de  $H$ .

Si  $g \in G$  est inévitable et  $\mathcal{F}_A$  est une famille géométrique sur  $A = \text{bdd}(A)$ , on choisit  $A' \equiv_{\text{bdd}(\emptyset)} A$  avec  $g \perp A'$ . Alors  $\mathcal{F}_{A'}$  est toujours géométrique; si  $F' \in \mathcal{F}_{A'}$  est de paramètre  $c'$  canonique indépendant de  $g$  sur  $A'$ , alors  $g \in F'$  par le lemme 3.13. Comme  $c' \perp g$  par transitivité, on a  $g \in X_{F'} = X_F$ , et donc  $g \in X$ , d'où  $\text{In}(G) \subseteq X \subseteq H$ .

Soit  $F \in \mathcal{F}_A$  de paramètre canonique  $c$ , et  $h' \in H$  générique sur  $Ac$ . Alors il y a  $c' \models p_F$  avec  $h' \in F_{c'}$  et  $c' \perp h'$ . Soit  $A' \perp_{c'} h'$  tel que  $A'c' \equiv_{\text{bdd}(\emptyset)} Ac$ , et  $\sigma$  un  $\text{bdd}(\emptyset)$ -automorphisme qui envoie  $A'c'$  sur  $Ac$ . Soit  $h = \sigma(h')$ . Comme  $h' \perp A'c'$  on a  $h \perp Ac$ , et  $h$  est générique dans  $H$  sur  $Ac$ . Comme  $h \in F$ , ceci signifie que  $F$  intersecte  $H$  dans un sous-groupe d'indice borné.

A priori la définition de  $H$  dépend des paramètres; on dénotera par  $H_B$  le groupe obtenu par la même construction mais avec des paramètres  $B$  nommés. On montrera que  $H_B$  est un sous-groupe d'indice borné dans  $H$ . Soit donc  $p_F$  le type Lascar-fort sur  $\emptyset$  du paramètre canonique  $c$  d'un groupe  $F_c$  dans une famille géométrique. Soit  $p'_F$  une extension non-deviante de  $p_F$  sur  $\text{bdd}(B)$ ; par la proposition 3.11 c'est le type Lascar-fort du paramètre canonique d'une famille géométrique dont les paramètres incluent  $B$ . Alors si  $h \in H_B$  est générique sur  $B$ , il y a  $c' \models p'_F$  avec  $h \in F_{c'}$  et  $c' \perp_B h$ . Mais  $c' \perp B$ , d'où  $c' \perp h$  et  $h \in X \subseteq H$ . Donc  $H_B \leq H$ .

Réciproquement, pour tout  $p'_F$  type Lascar-fort sur  $B$  du paramètre canonique d'un groupe dans une famille géométrique (avec  $B$  nommé) soit  $c_F \models p'_F$  une réalisation. Alors  $F_{c_F}$  intersecte  $H$  dans un sous-groupe d'indice borné, et il y a  $h \in H$  générique sur  $B \cup (c_F)_F$  avec  $h \in F_{c_F}$  pour tout  $F$ . Donc  $h \perp B \cup (c_F)_F$ , d'où  $h \perp_B c_F$  pour tout  $F$ , et  $h \in X_B \subseteq H_B$ . Ceci signifie que  $H_B$  est générique, et donc d'indice borné, dans  $H$ .

Puisque l'image d'une famille géométrique sous un automorphisme  $\text{bdd}(\emptyset)$ -définissable est encore géométrique avec les mêmes paramètres canoniques,  $H$  est invariant sous automorphisme  $\text{bdd}(\emptyset)$ -définissable.

Si donc un automorphisme  $\sigma$  est définissable à l'aide de paramètres  $B$ , on a que  $H_B = \sigma(H_B)$  est d'indice borné dans  $H$  et dans  $\sigma(H)$ . Ainsi  $H$  et  $\sigma(H)$  sont commensurables.

Soit  $p$  un type générique principal Lascar-fort de  $G$ . On pose

$$Y = \{g \in G : \exists y \models p [y \perp g \wedge g \in H^y]\}.$$

Comme avant,  $Y^2 = K$  est un sous-groupe de  $G$  et  $Y$  contient tous les génériques de  $K$ . Comme  $H$  contient  $\text{In}(G)$  et ce dernier est normal,  $\text{In}(G) \leq H^y$  pour tout  $y \models p$ , et  $\text{In}(G) \leq K$ . Si  $y \models p$ , alors  $H \cap H^y$  est d'indice borné dans  $H$  et contient un générique  $h$  de  $H$ . Alors  $h \perp y$  et  $h \in K$ . Ainsi  $K$  intersecte  $H$  dans un sous-groupe d'indice borné. Réciproquement, si  $h \in Y$  est générique dans  $K$ , il y a  $y \models p$  avec  $y \perp h$  et  $h \in H^y$ . Mais alors  $\text{tp}(h)$ ,  $\text{tp}(h/y)$  et  $\text{tp}(h^{y^{-1}}/y)$  ont les mêmes rangs locaux stratifiés; comme  $h^{y^{-1}} \in H$  on conclut que  $H \cap K$  est d'indice borné dans  $K$  : On a bien que  $H$  et  $K$  sont commensurables.

Soit  $g$  générique principal de  $G$ , et  $h \in K$  générique sur  $g$ . Alors il y a  $y \models p$  avec  $h \in H^y$  et  $y \perp h$ . Puisque  $p$  est générique et  $g$  générique principal, il y a  $y' \models p$  avec  $y'g \models p$  et  $y' \perp g$ . Comme  $h \perp g$  on peut prendre  $y = y' \perp h, g$  par le théorème d'indépendance. Alors  $h^g \in H^{yg}$  avec  $yg \models p$  et  $yg \perp_g h^g$ ; puisque  $yg \perp g$  par généricité on a  $yg \perp h^g$ , d'où  $h^g \in Y \subseteq K$ . Ainsi  $K$  est normalise par tous les génériques principaux de  $G$ , et donc par  $G^0$ .

Soit  $\tilde{\text{In}}(G)$  l'intersection de  $K$  avec tous ses  $G$ -conjugués, et tous ses conjugués par  $\emptyset$ -automorphisme. C'est une intersection bornée;  $\tilde{\text{In}}(G)$  est donc hyperdéfinissable sur  $\emptyset$ , et clairement normal dans  $G$ . Comme tous ces conjugués sont commensurables,  $\tilde{\text{In}}(G)$  est commensurable avec  $K$ , et donc avec  $H$ . Enfin,  $\tilde{\text{In}}(G)$  est commensurable avec tout conjugué par automorphisme définissable, et tout groupe  $F$  dans une famille géométrique l'intersecte dans un sous-groupe d'indice borné, puisque c'est vrai de  $H$ .

La définition de  $\tilde{\Psi}(G)$  et la preuve de ses propriétés sont analogues, en utilisant les familles pseudo-géométriques.  $\square$

**Remarque 4.2.** Il se peut que  $\text{In}(G)$  soit trivial, bien que  $\tilde{\text{In}}(G)$  est non-borné; de plus, l'effet de la saturation n'est pas évident, puisqu'un groupe non-saturé a certes moins d'éléments dans ses sous-groupes hyperdéfinissables, mais aussi moins de famille géométriques qui interdiraient aux éléments d'appartenir à  $\text{In}(G)$ . En particulier, si  $G \preceq G^*$ , il n'est pas clair si  $\text{In}(G) = \text{In}(G^*) \cap G$ , ni même si  $\text{In}(G) \leq \text{In}(G^*)$ .

**Proposition 4.3.** *S'il y a une famille géométrique non-triviale,  $\tilde{\text{In}}(G)$  est d'indice non-borné dans  $G$ . S'il y a une famille pseudo-géométrique non-bornée,  $\tilde{\Psi}(G)$  est d'indice non-borné dans  $G$ .*

*Démonstration :* Supposons  $\tilde{\text{In}}(G)$  d'indice borné dans  $G$ . Soit  $\mathcal{F}$  une famille géométrique et  $F, F' \in \mathcal{F}$ . Alors  $\tilde{\text{In}}(G) \cap F \cap F'$  est d'indice borné dans  $G$ , et contient un générique  $g$ . Mais  $g \in F$  et  $g \in F'$ , d'où  $F = F'$ .

Si  $\tilde{\Psi}(G)$  est d'indice borné dans  $G$  et  $\mathcal{F}$  est une famille pseudo-géométrique, soient  $(F_i : i \in I)$  des groupes distincts dans  $F$ . Alors  $\tilde{\Psi}(G) \cap \bigcap_{i \in I} F_i$  est générique dans  $G$  et contient un générique  $g$ . Donc  $I$  et  $\mathcal{F}$  sont bornés, puisque  $g \in F_i$  pour tout  $i \in I$ .  $\square$

**Remarque 4.4.** Si  $\mathcal{F}$  est une famille géométrique et  $F \in \mathcal{F}$  coupe  $\tilde{\text{In}}(G)$  dans un sous-groupe propre, soit  $g \in F$  générique pour  $G$  sur  $\emptyset$  et  $h \in \tilde{\text{In}}(G) \setminus F$  avec  $g \perp h$ . Alors  $gh \notin F$ ; mais  $gh$  est toujours générique, et peut être contenu dans un autre groupe  $F' \in \mathcal{F}$ . Notons que si  $F \cdot \tilde{\text{In}}(G) = F' \cdot \tilde{\text{In}}(G)$ , alors  $F$  et  $F'$  sont commensurables et donc égaux. En particulier la famille  $\bar{\mathcal{F}}$  des images de  $\mathcal{F}$  dans  $G/\tilde{\text{In}}(G)$  n'est plus géométrique, puisque le générique  $g \cdot \tilde{\text{In}}(G)$  est contenu dans plusieurs groupes dans  $\bar{\mathcal{F}}$ .

**Proposition 4.5.** *Si  $\mathcal{F}$  est une famille pseudo-géométrique dans  $G$ , alors l'image  $\bar{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$  dans  $G/\tilde{\Psi}(G)$  est une famille pseudo-géométrique. En particulier  $\tilde{\Psi}$  est un radical :  $\tilde{\Psi}(G/\tilde{\Psi}(G))$  est trivial.*

*Démonstration :* Comme  $F$  et  $F \cdot \tilde{\Psi}(G)$  sont commensurables pour  $F \in \mathcal{F}$ , si  $F \cdot \tilde{\text{In}}(G)$  et un conjugué groupe- ou modèle-théorique  $(F \cdot \tilde{\text{In}}(G))^\sigma$  sont commensurables, alors  $F$  et  $F^\sigma$  sont commensurables et donc égaux par connexité locale. Puisque  $\tilde{\text{In}}(G)$  est  $\sigma$ -invariant,  $\bar{\mathcal{F}}$  consiste de groupes localement connexes. Pour montrer que  $\bar{\mathcal{F}}$  est pseudo-géométrique, il suffit alors à montrer que tout générique de  $G/\tilde{\Psi}(G)$  n'est contenu que dans un nombre borné de groupes dans  $\bar{\mathcal{F}}$ .

Soit  $g \in G$  générique sur les paramètres  $A$  qui servent à définir  $\mathcal{F}$ , et  $H_g$  l'intersection avec  $\tilde{\Psi}(G)$  de tous les  $F \in \mathcal{F}$  qui contiennent  $g$ . C'est une intersection bornée;  $H_g$  est donc d'indice borné dans  $\tilde{\Psi}(G)$ . Soit  $p$  un type complet sur  $A$ ,  $g$  tel que  $p(x)$  implique que  $x \in \tilde{\Psi}(G)$  et  $gx$  est générique dans  $G$  sur  $A$ . Si  $a, b \models p$  et  $a \in bH_{gb}$ , alors  $ga$  est dans tous les  $F \in \mathcal{F}$  qui contiennent  $gb$ ; par conséquent  $H_{ga} \leq H_{gb}$  et

$$aH_{ga} \subseteq aH_{gb} = bH_{gb}.$$

Montrons l'égalité. Sinon  $x \in yH_{gy}$  définit un ordre partiel  $\leq$  sur  $p$  avec  $a < b$ . Puisque  $p$  est complet, on trouve une chaîne  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$  de réalisations de  $p$ ; par compacité il y a  $a_\omega \models p$  avec  $a_\omega \geq a_i$  pour tout  $i < \omega$ , et puisque la chaîne  $(a_i : i < \omega)$  est strictement croissante,  $a_\omega > a_i$  pour tout  $i < \omega$ . Récursivement on trouve ainsi une chaîne stricte aussi longue qu'on veut, et par le théorème d'Erdős-Rado il y a une sous-chaîne 4-indiscernable infinie, qu'on nomme encore  $(a_i : i \leq \omega)$ . Soit  $\varphi(x, yz)$  une formule dans  $y \leq x \leq z$  tel que

$$\text{tp}(a_0 a_1 a_2 a_3) \wedge p(x) \wedge p(x') \wedge \varphi(x, a_0 a_1) \wedge \varphi(x', a_2 a_3)$$

implique  $x \neq x'$ . Alors

$$\begin{aligned} D(p(x) \wedge a_0 \leq x \leq a_1, \varphi, 2) &= D(p(x) \wedge a_0 \leq x \leq a_\omega, \varphi, 2) \\ &\geq D(p(x) \wedge a_0 \leq x \leq a_1, \varphi, 2) + 1, \end{aligned}$$

une contradiction. Donc  $H_{ga} = H_{gb}$  et  $aH_{ga} = bH_{gb}$ . Ainis  $ga$  et  $gb$  sont contenus dans les mêmes groupes  $F \in \mathcal{F}$ .

Autrement dit, pour  $h \models p$  les ensembles  $hH_{gh}$  définissent une partition de  $p$ ; soit  $\sim_p$  la relation d'équivalence correspondante. Mais comme  $H_{gh}$  est d'indice borné dans  $\tilde{\Psi}(G)$ , pour  $h \models p$  la classe  $hH_{gh}$  contient un élément générique  $h'$  de  $\tilde{\Psi}(G)$  sur  $A, g, h$ . Donc  $h' \perp_{A, g} h$ , et  $h \perp_{A, g} h_{\sim_p}$  puisque  $h_{\sim_p} = h'_{\sim_p}$ . Ainsi  $h_{\sim_p} \in \text{bdd}(A, g)$  et il n'y a qu'un nombre borné de  $\sim_p$ -classes.

Or, pour tout  $h \in \tilde{\Psi}(G)$  et  $F \in \mathcal{F}$  tel que  $gh \in F$ , comme  $F$  coupe  $\tilde{\Psi}(G)$  dans un sous-groupe d'indice fini, il y a  $h' \in \tilde{\Psi}(G) \cap F$  générique sur  $A, g, h$ . Alors  $hh'$  est générique dans  $\tilde{\Psi}(G)$  sur  $A, g$ , et  $ghh' \in F$  est générique dans  $G$  sur  $A$ . Comme le nombre de types  $p$  sur  $A, g$  est borné, et chaque type ne contient qu'un nombre borné de  $\sim_p$ -classes, et chaque  $\sim_p$ -classe consiste d'éléments  $h \models p$  tel que  $gh$  est dans les mêmes groupes  $F \in \mathcal{F}$ , le translaté  $g\tilde{\Psi}(G)$  n'intersecte qu'un nombre borné de groupes  $F \in \mathcal{F}$ . Puisque tout générique de  $G/\tilde{\Psi}(G)$  se relève en un générique de  $G$ , la famille  $\bar{\mathcal{F}}$  est pseudo-géométrique.

Enfin, un élément  $\bar{g} \in G/\tilde{\Psi}(G)$  est dans un groupe  $\bar{F}_c$  d'une famille pseudo-géométrique  $\bar{\mathcal{F}}$  pour un  $c \perp \bar{g}$  si et seulement si un pré-image  $g \in G$  est dans le pré-imagé  $F_c \cdot \tilde{\Psi}(G)$  de la famille  $\mathcal{F}$  avec  $c \perp g$ . Alors  $F_c g \cap \tilde{\Psi}(G)$  est non-vidé et ainsi d'indice borné dans  $\tilde{\Psi}(G)$ ; soit  $g' \in F_c g \cap \tilde{\Psi}(G)$  générique dans  $\tilde{\Psi}(G)$  sur  $c, g$ . Alors  $g' \perp g, c$ , d'où  $g' \perp_g c$  et  $c \perp g, g'$ . Ainsi  $gg'^{-1} \perp c$  et  $gg'^{-1} \in F_c$ . Donc  $gg'^{-1} \in X_F$ , l'ensemble utilise dans la construction de  $\tilde{\Psi}(G)$ . On peut faire la même chose simultanément pour tous les  $p_F$  possibles : Il suffit de prendre  $g'$

générique dans

$$\tilde{\Psi}(G) \cap \bigcap_F F_{c_F} g$$

où l'intersection  $\bigcap_F$  porte sur un ensemble de représentants des groupes  $F$  pour les types Lascar-forts possibles de leur paramètre canonique  $c_F$ , et  $c_F \perp g$  avec  $g \in F_{c_F} \cdot \tilde{\Psi}(G)$ . Ainsi,  $gg'^{-1} \in X$  et

$$\tilde{\Psi}(G/\tilde{\Psi}(G)) \leq X^2/\tilde{\Psi}(G).$$

Or,  $X^2/\tilde{\Psi}(G)$  est un groupe borné. On a donc  $Y/\tilde{\Psi}(G) = X^2/\tilde{\Psi}(G)$ . Comme  $\tilde{\Psi}(G)$  est l'intersection de tous les conjugués de  $Y^2$  groupe- ou modèle-théoriques, l'intersection de tous les conjugués groupe- ou modèle-théoriques de  $Y^2/\tilde{\Psi}(G)$  est bien triviale.  $\square$

**Remarque 4.6.** On peut enfin définir  $\tilde{\text{In}}_P$  et  $\tilde{\Psi}_P$  de la même manière que Frécon (définition 2.3). Ce seront des sous-groupes hyperdéfinissables normaux, et contenus dans  $\tilde{\text{In}}(G)$  et  $\tilde{\Psi}(G)$ , respectivement. De plus,

$$\tilde{\text{In}}_P\left(\prod_{i < n} G\right) = \prod_{i < n} \tilde{\text{In}}_P(G) \quad \text{et} \quad \tilde{\Psi}_P\left(\prod_{i < n} G\right) = \prod_{i < n} \tilde{\Psi}_P(G).$$

## RÉFÉRENCES

- [1] O. Frécon. Groupes géométriques de rang de Morley fini. *J. Inst. Math. Jussieu*, 7(4) :751–792, 2008.
- [2] E. Jaligot. Generix never gives up. *J. Symb. Logic*, 71(2) :599–610, 2006.
- [3] B. Poizat. Groupes Stables. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique. *Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah* (1987). Traduction anglaise : Stable groups. Mathematical Surveys and Monographs, 87. *Amer. Math. Soc.* (2001).
- [4] F. O. Wagner. Stable groups. LMS LN 240. *Cambridge University Press*, Cambridge, 1997.
- [5] F. O. Wagner. *Simple Theories*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [6] F. O. Wagner. Stable Groups. In : M. Hazewinkel (ed.), *Handbook of Algebra*, Vol. 2, pp. 277–318. *Elsevier Science Publishers*, Amsterdam, 2000.
- [7] F. O. Wagner. Hyperdefinable groups in simple theories. *J. Math. Logic*, 1(1) :152–172, 2001.
- [8] F. O. Wagner. Groups in simple theories. In : M. Baaz, S.-D. Friedman, J. Krajíček (eds.), *Logic Colloquium 2001*, LN Logic 20, pp. 440–467. *Assoc. for Symbolic Logic, A. K. Peters*, Wellesley, 2005.

UNIVERSITÉ DE LYON ; UNIVERSITÉ LYON 1 ; CNRS ; INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR5208, BÂTIMENT BRACONNIER, 43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, 69622 VILLEURBANNE-CEDEX, FRANCE

*E-mail address:* wagner@math.univ-lyon1.fr